ΑΡΑΧΝΗ ΕΝΑΝΤΙΟΝ ΜΥΓΑΣ-ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΕ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΚΙΝΗΣΗΣ ΣΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Θεματική ενότητα: Πρακτικές και καινοτομίες στην εκπαίδευση και στην έρευνα
Συγγραφέας: Ζυγούρης Κωνσταντίνος, Καθηγητής Δ.Ε., MSc., MEd.,
Αγίων Θεολόγων 22Β, Καστοριά,
ΤΚ 52100. Τηλέφωνο: 6944586151
email: kostaszig@mac.com

Περίληψη εργασίας

Η εργασία αυτή διαπραγματεύεται μια δραστηριότητα (εδώ ταυτόσημη με την έννοια του problem solving και ορατά τα στάδια κατά Polya), η οποία μπορεί να αναπτυχθεί στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών σε τμήματα της Β' τάξης Λυκείου με τη συμβολή ενός δυναμικού μαθηματικού λογισμικού, όπως του Geogebra 3D. Στο τέλος της δραστηριότητας οι μαθητές εφαρμόζουν το Πυθαγορείο θεωρήμα για τον υπολογισμό της συντομότερης διαδρομής.

Abstract

This paper deals with one activity (here identical to the concept of problem solving, with visible steps in Polya), that can be developed within mathematics teaching in the second grade of Lyceum classrooms, using the contribution of a dynamic mathematical software like Geogebra 3D. At the end of the activity, students apply the Pythagorean Theorem to calculate the shortest path.

Εισαγωγή

Η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης, σύμφωνα με τον Van Hiele (Νικολουδάκης, 2008) και του τρισδιάστατου γεωμετρικού χώρου, αποτελεί αναπόσπαστο στοιχείο πολλών αναλυτικών προγραμμάτων των μαθηματικών και συνδέεται με πληθώρα καταστάσεων της καθημερινής ζωής (Jones & Mooney, 2003). Σύμφωνα με απόψεις πολλών καθηγητών μαθηματικών αλλά και πολλών ερευνητών, όπως για παράδειγμα του Schoenfeld (1994), η λύση προβλημάτων αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα των αποτελεσματικών αναλυτικών προγραμμάτων.

Η οπτικοποίηση των εννοιών του χώρου, η ανάπτυξη και ο χειρισμός νοητικών αναπαραστάσεων, που σχετίζονται με δισδιάστατα και τρισδιάστατα αντικείμενα, αποτελεί σημαντικό παράγοντα της ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης (NCTM, 2000). Ο προσανατολισμός στην καθημερινή μας ζωή, σημαίνει με απλά λόγια, ότι αντιλαμβανόμασθε τη θέση αντικειμένων σε σχέση με άλλα σημεία ή αντικείμενα στον περιβάλλοντα χώρο, για παράδειγμα σ'ένα δωμάτιο αλλά και σε ευρύτερους χώρους. Πολλοί άνθρωποι αντιμετωπίζουν σοβαρά προβλήματα στο να χειριστούν ένα τρισδιάστατο αντικείμενο οπτικά, αν και θεωρούν την αντίστοιχη διαδικασία με δισδιάστατα αντικείμενα φυσική ενέργεια.

Θεωρητικό Πλαίσιο

Η χρήση των ΤΠΕ στη Διδακτική των Μαθηματικών αναφέρεται κυρίως στη χρήση των νέων υπολογιστικών εργαλείων και των υπολογιστών στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η διαδικασία ένταξής τους προχωρά με γρήγορους ρυθμούς, με την οργάνωση και υλοποίηση προγραμμάτων επιμόρφωσης πρώτου και δεύτερου επιπέδου. Παρέχεται η δυνατότητα ενός διαφορετικού τρόπου οργάνωσης και σχεδίασης της μαθησιακής διαδικασίας, με στόχο την ενεργητική εμπλοκή των μαθητών σε προβληματικές καταστάσεις που έχουν προσωπικό νόημα γι' αυτούς.
Ένα μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο κυριαρχεί η χρήση της τεχνολογίας, παρέχει πολλά ερεθίσματα και ευκαιρίες εμπλοκής στα Μαθηματικά. Οι μαθητές αυτενεργούν, πειραματίζονται, εκφράζονται ελεύθερα, κάνουν εικασίες και επανεξετάζουν αρχικές τους σκέψεις και στρατηγικές. Στο επίκεντρο βρίσκεται η δημιουργία και η ανάπτυξη προσωπικών νοημάτων από τους μαθητές μέσα από τις υποθέσεις, εικασίες, αποδείξεις, ανασκευές, αντιπαραδείγματα, συνεχείς τροποποιήσεις και ελέγχους (Κυνηγός, 2006). Κατά τον Papert (1991), το ζητούμενο στην διδακτική των μαθηματικών είναι ο μαθητής να «κάνει μαθηματικά» ο ίδιος.
Η "διατύπωση προβλήματος", όσο και η επίλυσή του συνιστούν σημαντικά πεδία μελέτης της μαθηματικής εκπαίδευσης, με την έννοια της δημιουργίας νέων προβλημάτων (problem posing), όσο και στον επανασχηματισμό δοθέντος προβλήματος (Silver, 1994). Σημαντικοί ερευνητές στο χώρο των

μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως οι Polya (1954), Freudenthal (1973), υποστηρίζουν, ότι η διατύπωση προβλήματος είναι ένα σημαντικό μέρος των μαθηματικών εμπειριών των μαθητών.

Η παρούσα εμπειρική δραστηριότητα και μελέτη εστιάζει στην εμπλοκή μαθητών Λυκείου σε δραστηριότητες σχεδιασμένες με ψηφιακά εργαλεία τρισδιάστατων αναπαραστάσεων, στις οποίες καλούνται να προσομοιώσουν αντικείμενα της καθημερινής ζωής στο τρισδιάστατο περιβάλλον του εργαλείου αυτού, διερευνώντας έτσι, τη μαθηματική δομή των υπό κατασκευή τρισδιάστατων γεωμετρικών αντικειμένων.

Ο σχεδιασμός νέων υπολογιστικών εργαλείων που αφορούν τη γεωμετρία του τρισδιάστατου χώρου βοηθάει τους μαθητές να άρουν πολλά υπάρχοντα εμπόδια αναπαράστασης (Yeh & Nason 2004, Cabrilog 2005, Christou et al. 2005) για παράδειγμα πλοήγησης και εξεικόνισης, όπως αναφέρουν οι Κυνηγός και Ψυχάρης (2007), διαθέτοντας παράλληλα νέα μέσα και λειτουργικότητες που αφορούν:

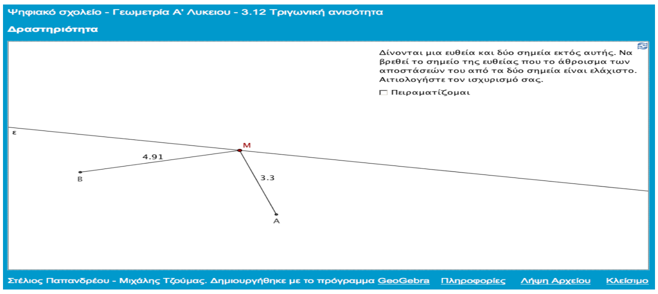
- τη δυνατότητα πλοήγησης και κατασκευής γεωμετρικών σχημάτων στον τρισδιάστατο χώρο
- την πολλαπλή – συμβολική και γραφική αναπαράσταση των μαθηματικών εννοιών και τον άμεσο χειρισμό μαθηματικών αναπαραστάσεων
- την ανάπτυξη εικασιών, υποθέσεων και αφαιρετικής ικανότητας των παιδιών
- τη σημασία της συνεργατικής μάθησης και της επικοινωνίας στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Παρουσίαση εργασίας

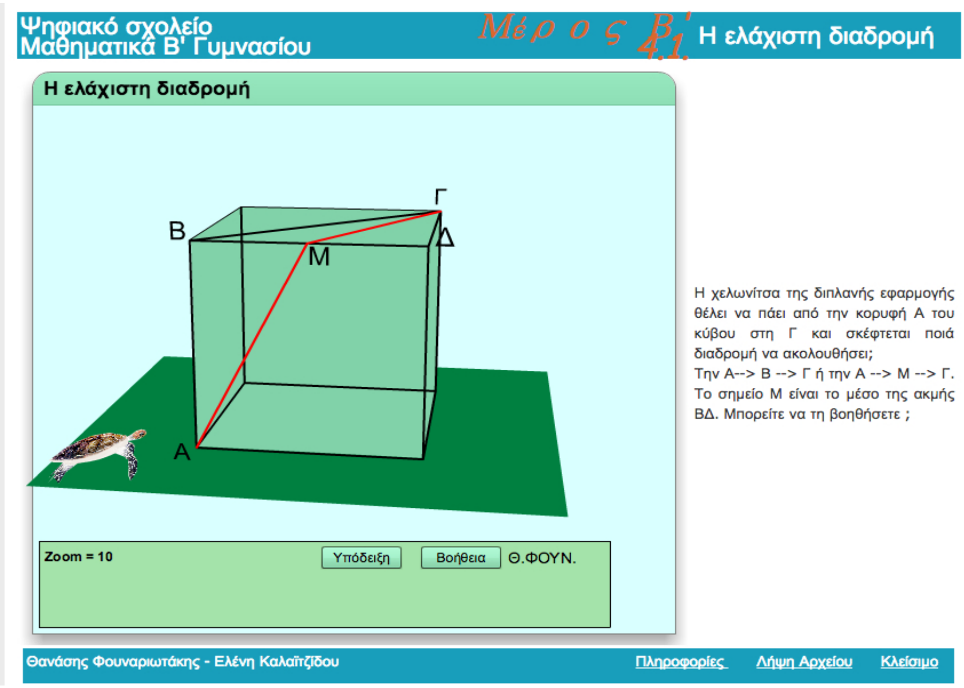
Στους μαθητές, οι οποίοι καλούνται να δουλέψουν σε ομάδες, δίνονται τμηματικά δύο εισαγωγικά προβλήματα στα οποία ο διδάσκων κάνει χρήση των ΤΠΕ για την παρουσίασή τους και την ανάπτυξη σχετικού σεναρίου και μαζί φύλλων εργασίας.

Το πρώτο πρόβλημα αφορά την εύρεση της μικρότερης διαδρομής μεταξύ δύο σημείων (ευθεία γραμμή) αλλά και της συμμετρίας για την εύρεση αυτής (καθοριστικός παράγοντας και στρατηγική στο problem solving). Εμφανίζεται ως εφαρμογή (4η) της παραγράφου 3.12 του σχολικού βιβλίου Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Αργυρόπουλου κ.α., 2001) και ως διαδραστική εφαρμογή πάλι στο βιβλίο από τους Στέλιο Παπανδρέου και Μιχάλη Τζούμα(http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGLA101/574/372

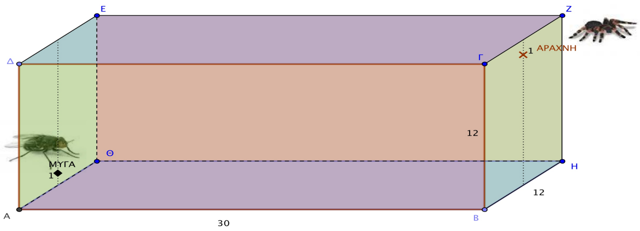
[0,16299/](http://ebooks.edu.gr/) όπως ανακτήθηκε στις 10/08/2014 και ώρα 04:40 μ.μ.).
Το πρόβλημα είναι: Δοθέντων μιας ευθείας και δυο σημείων εκτός αυτής προς το ίδιο μέρος της, να βρεθεί σημείο της ευθείας ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του από τα δυο σημεία να είναι ελάχιστο.



Το δεύτερο πρόβλημα υπάρχει στο διαδραστικό ψηφιακό βιβλίο της Β΄γυμνασίου (κεφάλαιο 4, παράγραφος 1) της γεωμετρίας και δινεται ως διαδραστική εφαρμογή από τους Φουναριωτάκη Αθανάσιο και Καλαϊτζίδου Ελένης (http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGYMB105/386/2552,9996/ όπως ανακτήθηκε στις 10/08/2014 και ώρα 05:50 μ.μ.). Είναι η εύρεση της καλύτερης διαδρμομής μιας χελωνίτσας πάνω σε ένα κύβο, όπως περιγράφεται στην παρακάτω εικόνα:

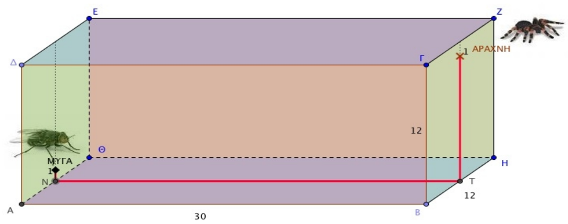


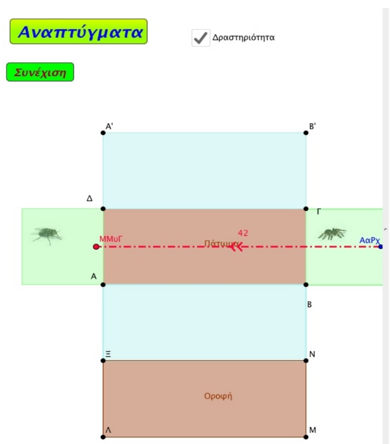
Στην παρούσα εργασία, δίνεται, ως ένα ενδιάμεσο πρόβλημα εργασίας που θα βοηθήσει τους μαθητές να συνδέσουν βήματα επίλυσής του με το τρίτο πρόβλημα, της κίνησης <u>πάνω</u> στο παραλληλεπίπεδο και του αναπτύγματος του, την εύρεση της αντίστοιχης ευθείας (γεωδαισιακής) καθώς και της εφαρμογής του πυθαγορείου θεωρήματος.
Το τελικό πρόβλημα που ουσιαστικά είναι και αντικείμενο της παρούσας εργασίας, αφορά την μελέτη εύρεσης της ελάχιστης διαδρομής μιας μύγας από μια αράχνη που βρίσκονται πάνω σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, διαστάσεων 30,12,12 και σε αντικρυστές έδρες. Είναι ένα γνωστό πρόβλημα που δίνεται στο βιβλίο του Eli Maor, The Pythogorean Theorem-A 4.000 Year History (κυκλοφορεί και σε μετάφραση στα ελληνικά, από τις εκδόσεις Κάτροπτρο) και το σχήμα φαίνεται παρακάτω.

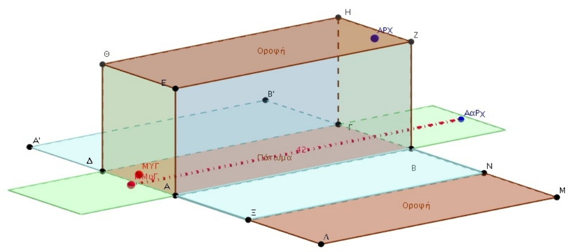


Το συγκεκριμένο πρόβλημα περιλαμβάνει ο διάσημος συγγραφέας μαθηματικών προβλημάτων Martin Gardner στο βιβλίο του: "The second Scientific book of mathematical puzzles and diversion" (1961), στο οποίο περιγράφει και την ιστορία του προβλήματος. Συγκεκριμένα, αναφέρει ότι πρωτοεμφανίστηκε σε μια εφημερίδα το 1903, χωρίς όμως να του δοθεί ιδιαίτερη σημασία, μέχρι να εμφανιστεί ξανά δύο χρόνια αργότερα στην London Daily Mail.
Για την διερεύνηση του προβλήματος, μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα λογισμικά Geogebra (3D), MaLT (τρισδιάστατος χελωνόκοσμος), Cabri3D αλλά και του Google SketchUp. Προσπαθήσαμε να εμπλακούμε σε δοκιμές με την χρήση <u>όλων,</u> (σε κάποια με μικρότερη, σε άλλα με μεγαλύτερη επιτυχία) και καταλήξαμε λόγω μεγαλύτερης εξοικοίωσης στην χρήση του Geogebra 3D (έκδοση 5.0.4) που είναι βέβαια δοκιμαστική έκδοση.
Στους μαθητές, δίνονται τα αντίστοιχα αρχεία geogebra 3D για την

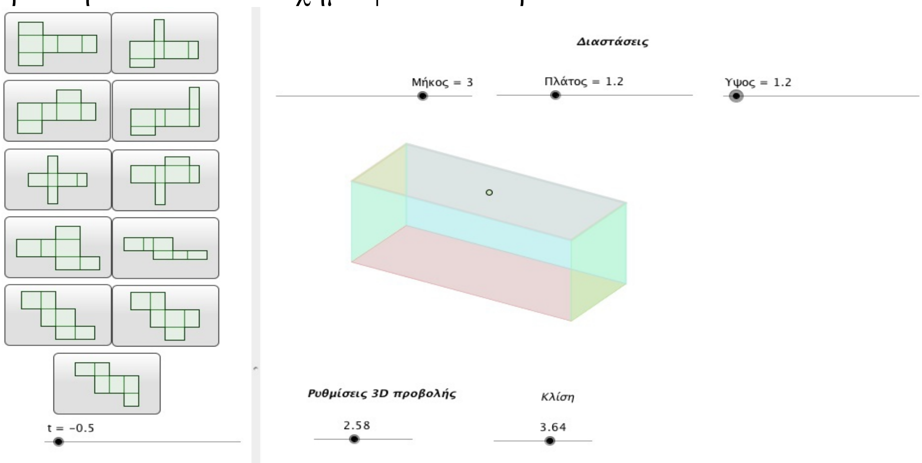
διερεύνηση του προβλήματος, των οποίων παρουσιάζονται εδώ κάποιες εικόνες από τα διάφορα στάδια διερεύνησης.
Το φύλλο εργασίας που προτείνουμε να δοθεί στους μαθητές, περιγράφεται συνοπτικά παρακάτω και περιλαμβάνει τα εξής βήματα:
(1ο) Δίνεται το αρχικό σχήμα του geogebra 3D, με το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, χωρίς να έχει τοποθετηθεί, η μύγα και η αράχνη. Ζητάμε από τους μαθητές να μελετήσουν το πρόβλημα για να το κατανοήσουν (πρώτο βήμα σύμφωνα με τον Polya). Θα κληθούν να τοποθετήσουν στις θέσεις που νομίζουν, την αράχνη και την μύγα. (Εδώ έχουμε αναπαράσταση του προβλήματος, πιθανόν και εξέταση ειδικών ή ακραίων περιπτώσεων, απλοποίηση του προβλήματος.)
(2ο) Αφού κατανοήσουν το πρόβλημα, να επινοήσουν ένα σχέδιο (δεύτερο βήμα κατά Polya). Μια “καλή” στρατηγική είναι οι μαθητές να υποθέσουν (θετική σκέψη) ότι έλυσαν το πρόβλημα. Βρήκαν την μικρότερη διαδρομή! Γιατί είναι η μικρότερη; Έχει κάποιο ιδιαίτερο χαρακτηριστικό; Έχει σχέση με άλλες συντομότερες διαδρομές που συνάντησαν στο παρελθόν;
(3ο) Κατά την ανάπτυξη του σχεδίου, ή αν δεν υπάρχει, ζητάμε να αλλάξει η οπτική γωνία που βλέπουν το σχήμα. Επιδιώκουμε οι μαθητές να οδηγηθούν στην σχεδίαση μιας ευθείας, πιθανόν σε αυτή την μορφή:



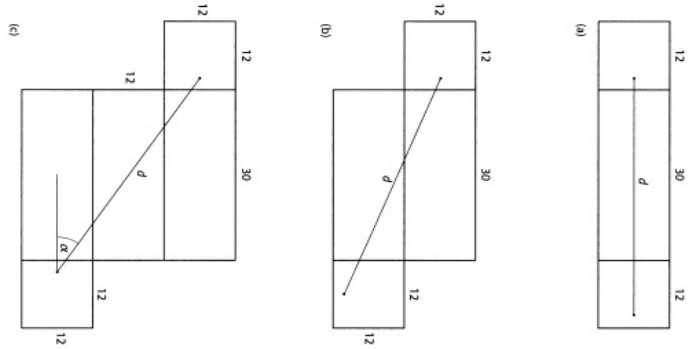


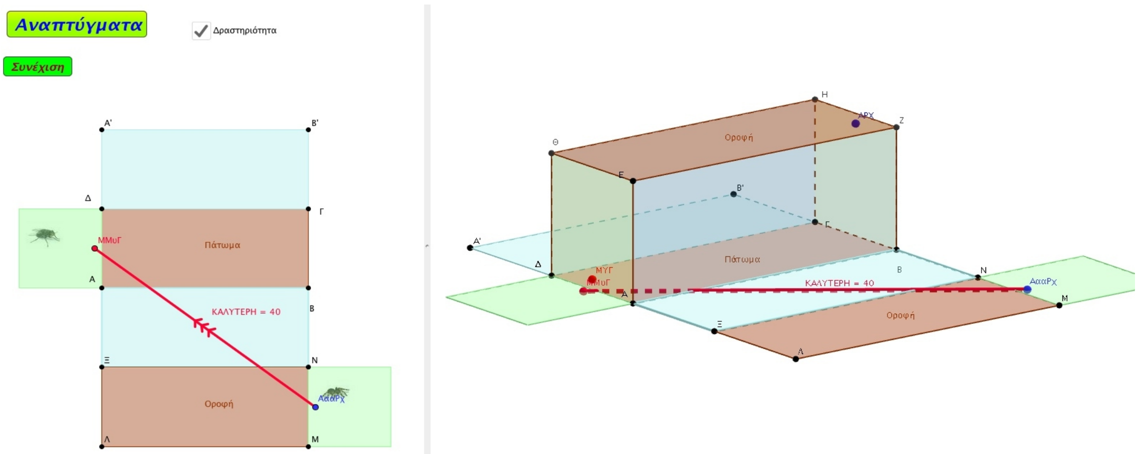


Οι μαθητές θεωρούν, πιθανόν, αυτή ως καλύτερη διαδρομή (άρα εκτελούν πλέον ένα σχέδιο - τρίτο βήμα κατά Polya), αφού αποτελείται από δυο τμήματα ευθειών (πιθανή απάντηση) και μάλλον είναι η πλέον προσιτή: γίνεται πάνω στο παραλληλεπίπεδο, όπως εύκολα φανερώνει το σχήμα. Εξάλλου, κατά την κατανόηση του προβλήματος οι μαθητές θα έχουν σχεδιάσει τις μεσοκάθετες των αντίστοιχων ακμών.
Οι επόμενες ερωτήσεις μας πρέπει να στοχεύουν στην διερεύνηση από τους μαθητές ύπαρξης και άλλης ευθείας που να συνδέει τα δυο σημεία. Έτσι με κατάλληλες ερωτήσεις, όπως:
Γιατί θεωρείτε ότι είναι η συντομότερη διαδρομή; Γράψτε την σκέψη σας......Μπορείτε να τροποποιήσετε το σχήμα ώστε να “φαίνεται” καλύτερα ότι πρόκειται για ευθεία γραμμή;....Μήπως το αρχικό παραλληλεπίπεδο δεν μπορεί να μας δώσει όλες τις απαιτούμενες πληροφορίες;....Μπορείτε να το “απλοποιήσετε” ;....
Σε κάθε περίπτωση μετά από τις αντίστοιχες ερωτήσεις, μπορεί να δοθεί το αρχείο geogebra που περιλαμβάνει τα δυνατά αναπτύγματα ενός παραλληλεπιπέδου. Το σχήμα φαίνεται παρακάτω:



Ένα τελευταίο βήμα μετά την κατανόηση της πιθανής ύπαρξης άλλης διαδρομής και της ανάγκης εμφάνισης των αναπτυγμάτων του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πιθανόν, να είναι η αλλαγή της θέσης της μύγας και της αράχνης και της σχεδίασης της αντίστοιχης ευθείας αφού το κάθε ανάπτυγμα τις “οδηγεί” σε διαφορετική θέση. Σε αυτή την περίπτωση τους ζητάμε να μελετήσουν προσεκτικά την θέση που θα βρίσκονται τα δυο έντομα μετά την ανάπτυξη του παραλληλεπιπέδου. Τέλος τους ζητάμε να βρουν την ελάχιστη απόσταση φέρνοντας τα αντίστοιχα “γνωστά” ευθύγραμμα τμήματα και εφαρμόζοντας το κατάλληλο τρόπο (θεώρημα ....). Η διερεύνηση γίνεται δυναμικά μέσα από το περιβάλλον του geogebra 3D και οι μαθητές έχουν την δυνατότητα να παρατηρούν την κίνηση του παραλληλεπιπέδου και από διαφορετικές γωνίες.





Στο τέλος της εργασίας τους, καλούνται οι μαθητές να κάνουν μια ανασκόπηση και έλεγχο της διαδικασίας που ακολούθησαν για την λύση του προβλήματος, τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν καθώς και τις προτάσεις που έγιναν ώστε να ξεπεραστούν αυτές οι δυσκολίες.

Συζήτηση – Συμπεράσματα

Η εμπλοκή των μαθητών σε προβλήματα τρισδιάστατης γεωμετρίας και η χρησιμοποίηση αντίστοιχα ΤΠΕ, αναμένουμε ότι μάλλον θα συνεπάγεται μια βελτίωση της ικανότητας των μαθητών, αντίληψης εννοιών του χώρου.
Υπάρχουν ενδείξεις (Γαβρίλης κ.α, 1997) ότι η πλοήγηση στο εικονικό περιβάλλον του λογισμικού εφοδιάζει τους μαθητές με διαισθήσεις, οι

οποίες, μετασχηματίζονται σταδιακά σε δομή του τρισδιάστατου χώρου. Σε αυτή την άποψη οδηγούμαστε και εμείς μέσα από την εργασία μαθητών μας στο πρόβλημα που παρουσιάστηκε, καθώς και σε άλλα παρόμοια.
Η χρήση διερευνητικών μεθόδων στην επίλυση προβληματικών καταστάσεων και η ενεργής συμμετοχή των μαθητών σε ομάδες κάνοντας χρήση του υπολογιστή, στοχεύει σε βελτίωση της στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά και στη βελτίωση βαθμιαία της γόνιμης μαθηματικής παρατηρητικότητας και δημιουργικής σκέψης των μαθητών.
Σκοπός και ελπίδα είναι, να αυξηθεί το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά.

Βιβλιογραφία

Αργυρόπουλος Η., Βλάμος Π., Κατσούλης Γ., Μαρκάτης Σ., Σιδέρης Π. (2001). *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου*. Αθήνα, Ο.Ε.Δ.Β.

Freudenthal, J. (1973). Mathematics as an educational task. Dodrecht, Netherlands: Reidel.

Gardner, M. (1961). *The 2nd Scientific American book of mathematical puzzles & diversions, a new selection, Simon and Schuster*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Jones, K., & Mooney, C. (2003). Making space for geometry in primary mathematics. In I.Thompson Ed.), Enhancing Primary Mathematics Teaching and Learning (pp3-15). London: Open University Press.

Jurdak, M., & Sahin, I. (2001). Problem solving activity in the workplace and the school: The case of constructing solids. *Educational Studies in Mathematics,* 47, 297–315.

Kynigos, C., Koutkis, M., Hadzilakos, T. (1997). Mathematics with component oriented exploratory software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2, 229 – 250.

Lerch, C. M. (2004). Control decisions and personal beliefs: their effect on solving mathematical problems. *Journal of Mathematical Behavior,* 23, 21-36.

Lesh, R., & Doerr, H.M. (2003). Beyond Constructivism: *A Models and Modeling Perspective on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching. Hillsdale,* NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Maor, E. (2007). *The Pythagorean Theorem : A 4,000 Year History.* Princeton University Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: Va, NCTM.

Νικολουδάκης Ε. (2008). Η διδασκαλία του Θεωρήματος της εσωτερικής διχοτόμου με τη βοήθεια του συνδυασμού της θεωρίας van Hiele και της Γνωστικής Μαθητείας στα πλαίσια των ΤΠΕ. *Αστρολάβος. Επιστημονικό Περιοδικό Νέων Τεχνολογιών τ. 10, 47-68.* Εκδόσεις Ε.Μ.Ε. Αθήνα.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Schoenfeld, A. (1994). What do we know about mathematics curricula? Journal of Mathematical Behavior, 13, 55-80.

Ψυχάρης, Γ., Κυνηγός, Χ. (2007). *Πλοήγηση και γεωμετρικές κατασκευές με χρήση τρισδιάστατου υπολογιστικού περιβάλλοντος πολλαπλών αναπαράστασεων, Τυπικά και άτυπα μαθηματικά: χαρακτηριστικά, σχέσεις και αλληλεπιφράσεις στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης.* Πρακτικά Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών, 509-523, Επιμ. Σακονίδης, Χ., Δεσλή, Δ., Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, Σχολή Επιστημών της Αγωγής, Τυπωθήτω.